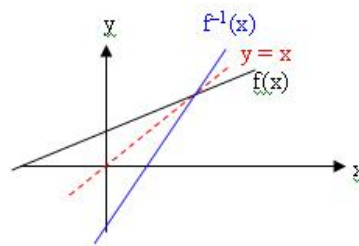
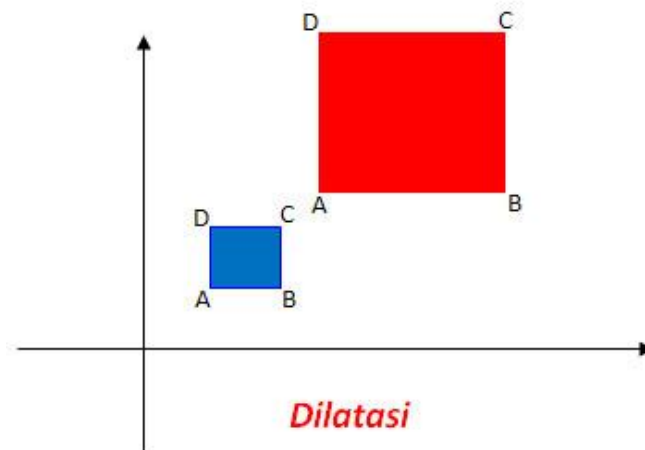


MODUL

TRANSFORMASI GEOMETRI



KELAS XII. IPA

16.1.6

Disusun Oleh :
Drs. Pundjul Prijono
Nip. 19580117.198101.1.003

PEMERINTAH KOTA MALANG
DINAS PENDIDIKAN
SMA NEGERI 6

Jalan Mayjen Sungkono No. 58 Telp. (0341) 752036 Malang

BAB I.PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Dalam modul ini, anda akan mempelajari transformasi yang terdiri atas refleksi, translasi, rotasi, dan dilatasi yang diidentifikasi berdasarkan ciri-cirinya. Refleksi merupakan pencerminan. Dalam geometri bidang pencerminan terdiri dari pencerminan terhadap sumbu x , sumbu y , $y = x$, $y = -x$, $x = m$, $y = n$, terhadap titik pusat O . Translasi merupakan perpindahan. Rotasi merupakan perputaran. Rotasi ditentukan oleh pusat dan besar sudut. Titik pusat di $O(0,0)$ dan di $P(a,b)$, sedangkan untuk besar sudut positif berlawanan arah dengan arah jarum jam dan sebaliknya besar sudut negatif searah dengan arah jarum jam. Dilatasi merupakan transformasi yang merubah ukuran tetapi tidak merubah bentuk bangun. Dilatasi ditentukan oleh pusat dan faktor skala.

B. Prasyarat

Agar dapat mempelajari modul ini, anda harus mempelajari operasi bilangan real dan dasar-dasar trigonometri.

C. Petunjuk Penggunaan Modul

1. Perhatikan langkah-langkah dalam setiap contoh sehingga mempermudah dalam memahami konsep transformasi geometri.
2. Apabila ada soal latihan, kerjakanlah soal-soal tersebut sebagai latihan untuk persiapan evaluasi.
3. Jawablah tes formatif dengan jelas sesuai dengan kemampuan Anda. Jika Anda masih ragu-ragu dengan jawaban yang Anda peroleh, Anda bisa melihat kunci jawaban formatif yang sesuai.
4. Kerjakan soal-soal yang ada pada evaluasi.

D. Tujuan akhir

1. Menjelaskan arti geometri dari suatu transformasi bidang
2. Melakukan operasi berbagai jenis transformasi: translasi refleksi, dilatasi, dan rotasi.
3. Menentukan persamaan matriks dari transformasi pada bidang.
4. Menentukan aturan transformasi dari komposisi beberapa transformasi
5. Menentukan persamaan matriks dari komposisi transformasi pada bidang.

BAB II. PEMBELAJARAN

Kompetensi : Menggunakan transformasi geometri yang dapat dinyatakan dengan matriks dalam pemecahan masalah.

Sub Kompetensi :1. Mendefinisikan arti geometri dari suatu transformasi di bidang melalui pengamatan dan kajian pustaka
2. Menentukan hasil transformasi geometri dari sebuah titik dan bangun
3. Menentukan operasi aljabar dari transformasi geometri dan mengubahnya ke dalam bentuk persamaan matriks.

B.KEGIATAN BELAJAR

1. Kegiatan Belajar 1

Definisi

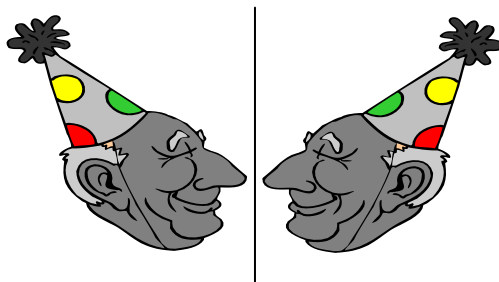
Transformasi merupakan proses perpindahan suatu titik atau garis atau bidang menjadi bayangan titik atau garis atau bidang tersebut.

Jenis-jenis transformasi :

1. Refleksi (pencerminan)
2. Translasi (Perpindahan)
3. Rotasi (perputaran)
4. Dilatasi (perbesaran)

1. REFLEKSI

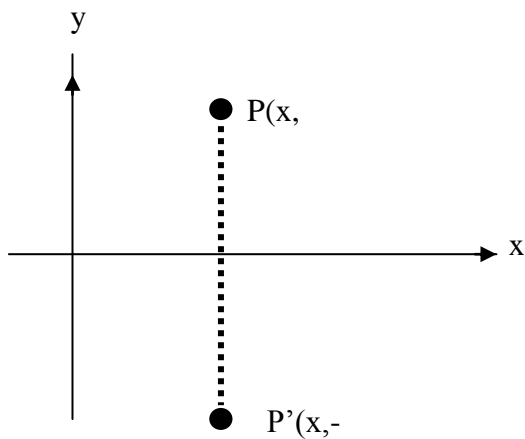
Refleksi adalah pencerminan.



Dalam geometri bidang, sebagai cermin digunakan

- a. Sumbu x
- b. Sumbu y
- c. $x = m$
- d. $y = n$
- e. $y = x$
- f. $y = -x$
- g. Titik pusat $O(0,0)$

a. Refleksi terhadap sumbu x



Berdasarkan gambar tersebut, jika bayangan titik $P(x,y)$ adalah $P'(x',y')$ maka $P'(x', y') = P'(x, -y)$ sehingga dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut :

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ adalah matriks pencerminan terhadap sumbu x.

Contoh :

1. Diketahui segitiga ABC dengan koordinat titik **A(2,0)**, **B(0,-5)** dan **C(-3,1)**. Tentukan koordinat bayangan segitiga **ABC** tersebut bila dicerminkan terhadap sumbu x

jawab :

Pencerminan terhadap sumbu x

$$\begin{aligned} P(x,y) &\longrightarrow P'(x, -y) \\ A(2,0) &\longrightarrow A'(2,0) \\ B(0,-5) &\longrightarrow B'(0,5) \\ C(-3,1) &\longrightarrow C'(-3,-1) \end{aligned}$$

2. Bayangan garis $3x - 2y + 5 = 0$ oleh refleksi terhadap sumbu x adalah

Jawab :

oleh pencerminan terhadap sumbu X

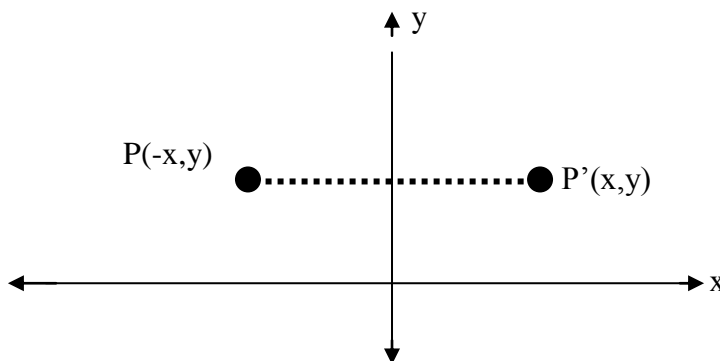
$$\text{maka: } x' = x \longrightarrow x = x'$$

$$y' = -y \longrightarrow y = -y'$$

$x = x'$ dan $y = -y'$ disubstitusikan ke kurva $3x - 2y + 5 = 0$ diperoleh: $3x' - 2(-y') + 5 = 0$ atau $3x' + 2y' + 5 = 0$

Jadi bayangannya adalah $3x + 2y + 5 = 0$

b. Refleksi terhadap sumbu y



Berdasarkan gambar tersebut, jika bayangan titik $P(x,y)$ adalah $P'(x',y')$ maka $P'(x',y') = P'(-x,y)$, sehingga dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut :

$$x' = -x$$

$$y' = y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

jadi $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks pencerminan terhadap sumbu y.

Contoh :

1. Tentukan bayangan kurva $y = x^2 - x$ oleh pencerminan terhadap sumbu Y .

Jawab:

oleh pencerminan terhadap sumbu Y maka: $x' = -x \rightarrow x = -x'$; $y' = y \rightarrow y = y'$

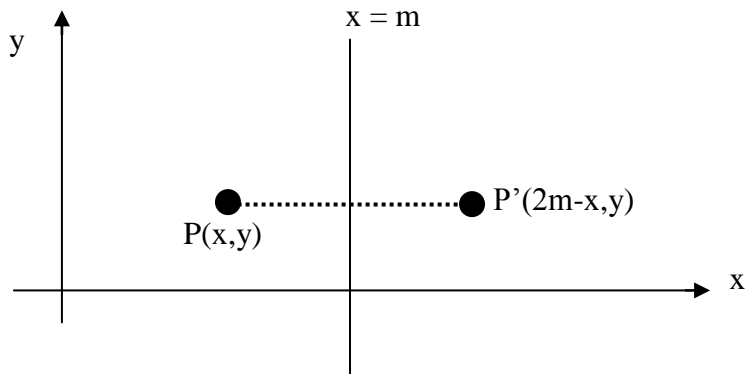
$x = -x'$ dan $y = y'$ disubstitusi ke $y = x^2 - x$

diperoleh: $y' = (-x')^2 - (-x')$

$$y' = (x')^2 + x'$$

Jadi bayangannya adalah $y = x^2 + x$

c. Refleksi terhadap garis $x = m$



Berdasarkan gambar tersebut, jika bayangan titik $P(x, y)$ adalah $P'(x', y')$ maka

$$P'(x', y') = P'(2m - x, y).$$

Contoh :

1. Tentukan bayangan kurva $y^2 = x - 5$ oleh pencerminan terhadap garis $x = 3$.

Jawab:

oleh pencerminan terhadap garis $x = 3$ maka: $x' = 2m - x \rightarrow x = 2.3 - x' = 6 - x'$;

$y' = y \rightarrow y = y'$

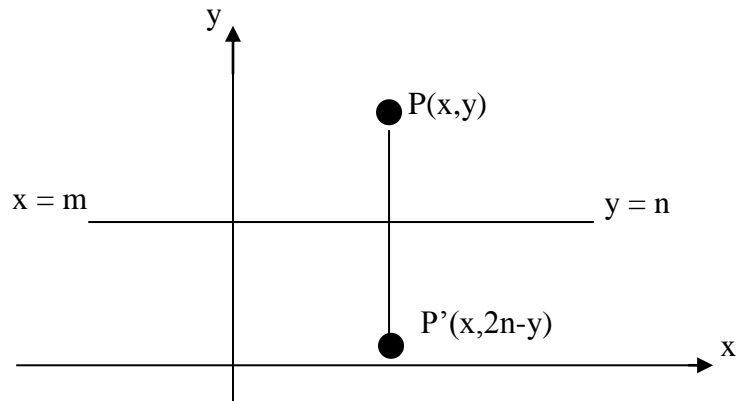
$x = 6 - x'$ dan $y = y'$ disubstitusi ke $y^2 = x - 5$

diperoleh: $(y')^2 = (6 - x') - 5$

$$(y')^2 = 1 - x'$$

Jadi bayangannya adalah $y^2 = 1 - x$

d. Refleksi terhadap garis $y = n$



Berdasarkan gambar diatas, jika bayangan titik $P(x,y)$ adalah $P'(x',y')$ maka $P'(x',y') = P'(x, 2n - y)$.

Contoh :

1. Tentukan bayangan kurva $x^2 + y^2 = 4$ oleh pencerminan terhadap garis $y = -3$.

Jawab:

oleh pencerminan terhadap garis $y = -3$ maka: $x' = x$; $y' = 2n - y$
pencerminan terhadap garis $y = -3$

maka: $x' = x \rightarrow x = x'$

$$y' = 2n - y$$

$$y' = 2(-3) - y$$

$$y' = -6 - y \rightarrow y = -y' - 6$$

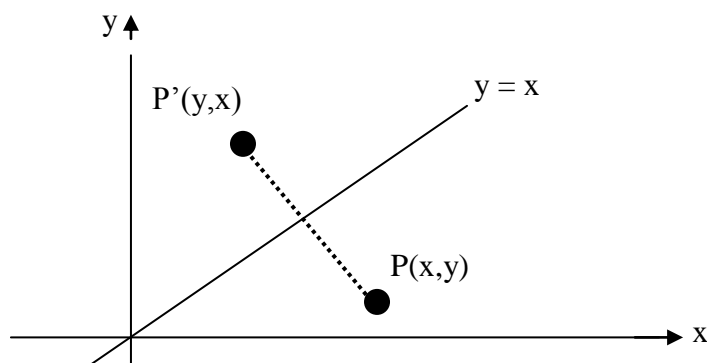
disubstitusi ke $x^2 + y^2 = 4$

$$(x')^2 + (-y' - 6)^2 = 4$$

$$(x')^2 + ((-y')^2 + 12y' + 36) - 4 = 0$$

Jadi bayangannya: $x^2 + y^2 + 12y + 32 = 0$

e. Refleksi terhadap garis $y = x$



Berdasarkan gambar diatas, jika bayangan $P(x,y)$ adalah $P'(x',y')$ maka $P'(x',y') = P'(y,x)$, sehingga dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut :

$$x' = y$$

$$y' = x$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

jadi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ adalah matriks pencerminan terhadap garis $y = x$.

Contoh :

1. Bayangan garis $2x - y + 5 = 0$ yang dicerminkan terhadap garis $y = x$ adalah....

Pembahasan:

Matriks transformasi refleksi terhadap $y = x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sehingga $x' = y$ dan $y' = x$

disubstitusi ke $2x - y + 5 = 0$

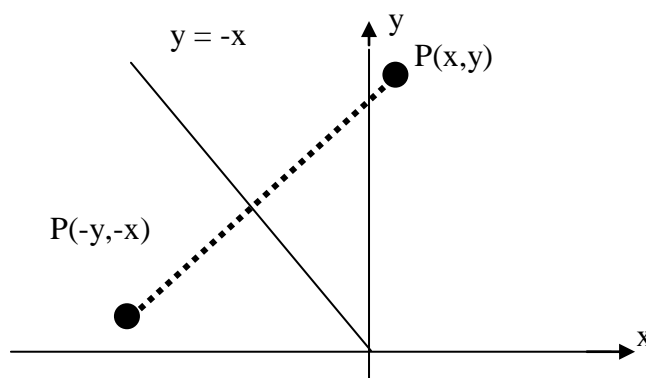
diperoleh: $2y' - x' + 5 = 0$

$$-x' + 2y' + 5 = 0$$

$$-x' + 2y' + 5 = 0 \text{ dikali } (-1) \rightarrow x' - 2y' - 5 = 0$$

Jadi bayangannya adalah $x - 2y + 5 = 0$

f. Refleksi terhadap garis $y = -x$



Berdasarkan gambar diatas, jika bayangan $P(x,y)$ adalah $P'(x',y')$ maka $P'(x',y') = P'(-y,-x)$, sehingga dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut :

$$x' = -y$$

$$y' = -x$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ adalah matriks pencerminan terhadap garis $y = -x$.

Contoh :

1. Bayangan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$ yang dicerminkan terhadap garis $y = -x$ adalah....

Jawab :

$$x' = -y \text{ dan } y' = -x \text{ atau } y = -x' \text{ dan } x = -y'$$

Kemudian disubstitusikan ke

$$x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$$

$$(-y')^2 + (-x')^2 - 8(-x') + 7 = 0$$

$$(y')^2 + (x')^2 + 8x' + 7 = 0$$

$$(x')^2 + (y')^2 + 8x' + 7 = 0$$

Jadi bayangannya adalah

$$x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$$

Kerjakan soal-soal berikut supaya anda lebih memahami uraian materi kegiatan belajar 1. Jangan membaca/melihat petunjuk mengerjakan latihan (kunci jawaban) sebelum anda coba mengerjakannya. Petunjuk untuk mengerjakan latihan hanya sebagai panduan bila anda mengalami kesulitan menjawab soal berikut ini.

Kegiatan 1.

1. Diketahui titik A(2, -1), B(5, 3), dan C(-2, 4). Tentukan bayangan titik A, B, dan C, jika dicerminkan terhadap:
 - a. sumbu x
 - b. sumbu y
 - c. garis $x = 2$
 - d. garis $y = -3$

- e. garis $y = x$
 f. garis $y = -x$
2. Diketahui persamaan garis $2x + 3y = 6$. Tentukan bayangan garis tersebut jika dicerminkan terhadap sumbu y
3. Diketahui persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 16$. Tentukan bayangan lingkaran jika dicerminkan terhadap garis $y = x$.

Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan 1 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan 1

- Jika nilai perolehan < 75 , artinya anda belum paham tentang Refleksi maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep Refleksi.
- Jika nilai perolehan ≥ 75 maka anda boleh meneruskan pada kegiatan modul berikut ini.

2. TRANSLASI

adalah pergeseran.

Jika translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memetakan titik $P(x,y)$ ke $P'(x',y')$

maka $x' = x + a$ dan $y' = y + b$

ditulis dalam bentuk matrik:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh :

1. Diketahui segitiga OAB dengan koordinat titik $O(0,0)$, $A(3,0)$ dan $B(3,5)$. Tentukan

koordinat bayangan segitiga OAB tersebut bila ditranslasi oleh $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

jawab :

$$\text{titik } O(0,0) \xrightarrow{T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} O'(0+1, 0+3) = O'(1,3)$$

$$\text{titik } A(3,0) \xrightarrow{T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} A'(3+1, 0+3) = A'(4,3)$$

$$\text{titik B (3,5)} \xrightarrow{T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} B' (3+1, 5+3) = B'(4,8)$$

2. Bayangan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ oleh translasi $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ adalah....

Jawab : Karena translasi $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ maka

$$x' = x - 1 \rightarrow x = x' + 1 \dots (1)$$

$$y' = y + 3 \rightarrow y = y' - 3 \dots (2)$$

(1) dan (2) di substitusi ke $x^2 + y^2 = 25$

$$\text{diperoleh } (x' + 1)^2 + (y' - 3)^2 = 25;$$

Jadi bayangannya adalah:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

Kerjakan soal-soal berikut supaya anda lebih memahami uraian materi kegiatan belajar 2. Jangan membaca/melihat petunjuk mengerjakan latihan (kunci jawaban) sebelum anda coba mengerjakannya. Petunjuk untuk mengerjakan latihan hanya sebagai panduan bila anda mengalami kesulitan menjawab soal berikut ini.

Kegiatan 2

1. Diketahui titik A(-3,2), B(2,-5), dan C(5,4). Tentukan bayangan titik A, B, C jika

$$\text{ditranslasi oleh } T = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Diketahui persamaan garis $x - 2y + 4 = 0$. Tentukan bayangan garis tersebut jika

$$\text{ditranslasi oleh } T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan 2 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan 2

- Jika nilai perolehan < 75 , artinya anda belum paham tentang Translasi maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep Translasi.
- Jika nilai perolehan ≥ 75 maka anda boleh meneruskan pada kegiatan modul berikut ini.

3. ROTASI

adalah perputaran. Rotasi ditentukan oleh pusat rotasi dan besar sudut rotasi.

Rotasi Pusat $O(0,0)$

Titik $P(x,y)$ dirotasi sebesar α berlawanan arah jarum jam dengan pusat $O(0,0)$ dan diperoleh bayangan $P'(x',y')$

$$\text{maka: } x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

Jika sudut putar $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ (rotasinya dilambangkan dengan $R^{\frac{1}{2}\pi}$)

$$\text{maka } x' = -y \text{ dan } y' = x$$

dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi } R^{\frac{1}{2}\pi} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Contoh :

1. Persamaan bayangan garis $x + y = 6$ setelah dirotasikan pada pangkal koordinat dengan sudut putaran $+90^0$, adalah....

Jawab :

$$R+90^0 \text{ berarti: } x' = -y \rightarrow y = -x'$$

$$y' = x \rightarrow x = y'$$

$$\text{disubstitusi ke: } x + y = 6$$

$$y' + (-x') = 6$$

$$y' - x' = 6 \rightarrow x' - y' = -6$$

$$\text{Jadi bayangannya: } x - y = -6$$

2. Persamaan bayangan garis $2x - y + 6 = 0$ setelah dirotasikan pada pangkal koordinat dengan sudut putaran -90^0 , adalah ..

Jawab :

$$R-90^0 \text{ berarti:}$$

$$x' = x\cos(-90) - y\sin(-90)$$

$$y' = x\sin(-90) + y\cos(-90)$$

$$x' = 0 - y(-1) = y$$

$$y' = x(-1) + 0 = -x'$$

$$\text{atau dengan matriks: } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R-90}^0 \text{ berarti: } x' = y \rightarrow y = x'$$

$$y' = -x \rightarrow x = -y'$$

$$\text{disubstitusi ke: } 2x - y + 6 = 0$$

$$2(-y') - x' + 6 = 0$$

$$-2y' - x' + 6 = 0$$

$$x' + 2y' - 6 = 0$$

$$\text{Jadi bayangannya: } x + 2y - 6 = 0$$

Jika sudut putar $\alpha = \pi$ (rotasinya dilambangkan dengan H)

maka $x' = -x$ dan $y' = -y$

dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi H} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Contoh :

1. Persamaan bayangan parabola $y = 3x^2 - 6x + 1$ setelah dirotasikan pada pangkal koordinat dengan sudut putaran $+180^\circ$, adalah

Jawab :

$$\mathbf{H} \text{ berarti: } x' = -x \rightarrow x = -x'$$

$$y' = -y \rightarrow y = -y'$$

$$\text{disubstitusi ke: } y = 3x^2 - 6x + 1$$

$$-y' = 3(-x')^2 - 6(-x') + 1$$

$$-y' = 3(x')^2 + 6x' + 1 \text{ (dikali -1)}$$

$$\text{Jadi bayangannya: } y = -3x^2 - 6x - 1$$

Kerjakan soal-soal berikut supaya anda lebih memahami uraian materi kegiatan belajar 3. Jangan membaca/melihat petunjuk mengerjakan latihan (kunci jawaban) sebelum anda coba mengerjakannya. Petunjuk untuk mengerjakan latihan hanya sebagai panduan bila anda mengalami kesulitan menjawab soal berikut ini.

Kegiatan 3

1. Tentukan bayangan persamaan garis $2x + 3y = 6$ oleh rotasi pada pusat O sebesar $+90^0$
2. Tentukan bayangan persamaan lingkaran $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ oleh rotasi pada O sebesar $+180^0$

Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan 3 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan 3

- Jika nilai perolehan < 75 , artinya anda belum paham tentang Rotasi maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep Rotasi.
- Jika nilai perolehan ≥ 75 maka anda boleh meneruskan pada kegiatan modul berikut ini.

4. DILATASI

Adalah suatu transformasi yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) suatu bangun tetapi tidak mengubah bentuk bangunnya.

Dilatasi Pusat O(0,0) dan faktor skala k

Jika titik P(x,y) didilatasi terhadap pusat O(0,0) dan faktor skala k didapat bayangan P'(x',y') maka $x' = kx$ dan $y' = ky$ dan dilambangkan dengan [O,k].

Contoh :

Garis $2x - 3y = 6$ memotong sumbu X di A dan memotong sumbu y di B. Karena dilatasi [O,-2], titik A menjadi A' dan titik B menjadi B'.

Hitunglah luas segitiga OA'B'

Jawab :

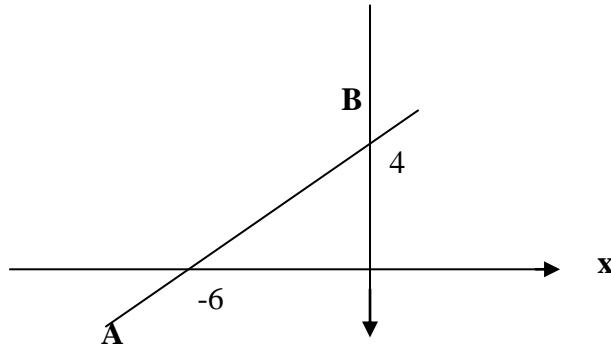
garis $2x - 3y = 6$ memotong sumbu X di A(3,0) memotong sumbu Y di B(0,2) karena dilatasi [O,-2] maka

$$A'(kx,ky) \rightarrow A'(-6,0) \text{ dan}$$

$$B'(kx,ky) \rightarrow B'(0,-4)$$

Titik A'(-6,0), B'(0,-4) dan titik O(0,0) membentuk segitiga seperti pada gambar:

↑y



$$\begin{aligned}\text{Sehingga luasnya} &= \frac{1}{2} \times OA' \times OB' \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \\ &= 12\end{aligned}$$

Dilatasi Pusat $P(a,b)$ dan faktor skala k

bayangannya adalah

$$x' = k(x - a) + a \quad \text{dan}$$

$$y' = k(y - b) + b$$

dilambangkan dengan $[P(a,b), k]$

Contoh :

Titik $A(-5,13)$ didilatasikan oleh $[P, \frac{2}{3}]$ menghasilkan A' .

Jika koordinat titik $P(1,-2)$, maka koordinat titik A' adalah....

Jawab :

$$A(x,y) \xrightarrow{[P(a,b),k]} A'(x',y')$$

$$x' = k(x - a) + a$$

$$y' = k(y - b) + b$$

$$[P(1,-2), \frac{2}{3}]$$

$$A(-5,13) \xrightarrow{\quad} A'(x', y')$$

$$x' = \frac{2}{3}(-5 - 1) + 1 = -3$$

$$y' = \frac{2}{3}(13 - (-2)) + (-2) = 8$$

Jadi koordinat titik $A'(-3,8)$

Kerjakan soal-soal berikut supaya anda lebih memahami uraian materi kegiatan belajar 4. Jangan membaca/melihat petunjuk mengerjakan latihan (kunci jawaban) sebelum anda coba

mengerjakannya. Petunjuk untuk mengerjakan latihan hanya sebagai panduan bila anda mengalami kesulitan menjawab soal berikut ini.

Kegiatan 4

1. Diketahui titik A(2, 3), B(-4, 5), dan C(-3,-5). Tentukan bayangan titik A, B dan C jika dilatasi [O, -2]
2. Tentukan bayangan titik A(-3,4) oleh dilatasi dengan pusat (2,3) dan faktor skala -1/2

Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan 4 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan 4

- Jika nilai perolehan <75 , artinya anda belum paham tentang Dilatasi maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep Dilatasi.
- Jika nilai perolehan ≥ 75 maka anda boleh meneruskan pada kegiatan modul berikut ini.

2. Kegiatan Belajar 2

A. Komposisi Transformasi

Bila T1 adalah suatu transformasi dari titik A(x,y) ke titik A'(x',y') dilanjutkan dengan transformasi T2 adalah transformasi dari titik A'(x',y') ke titik A''(x'',y'') maka *dua transformasi berturut-turut* tsb disebut *Komposisi Transformasi* dan ditulis T2 o T1.

Komposisi Transformasi dengan matriks

Bila T1 dinyatakan dengan matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan T2 dengan matriks $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ maka *dua*

transformasi berturut-turut mula-mula T1 dilanjutkan dengan T2 ditulis T2 o T1 =

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Contoh :

1. Matriks yang bersesuaian dengan dilatasi dengan pusat (0,0) dan faktor skala 3 dilanjutkan dengan refleksi terhadap garis $y = x$ adalah...

Jawab :

M1= Matrik dilatasi skala 3 adalah $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

M2 = Matrik refleksi terhadap $y = x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Matriks yang bersesuaian dengan M1 dilanjutkan M2

$$\text{ditulis } M2 \circ M1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi matriknya adalah $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

2. Bayangan segitiga ABC, dengan A (2,1), B (6,1), C (5,3) karena refleksi terhadap sumbu Y dilanjutkan rotasi (O, π) adalah...

Jawab :

$$\text{Refleksi sb Y: } (x,y) \xrightarrow{\text{sb Y}} (-x, y)$$

$$\text{Rotasi } \pi : (x,y) \xrightarrow{O, \pi} (-x,-y)$$

$$A(2,1) \xrightarrow{\text{sb Y}} A'(-2,1) \xrightarrow{O, \pi} A''(2,-1)$$

$$B(6,1) \xrightarrow{\text{sb Y}} B'(-6,1) \xrightarrow{O, \pi} B''(6,-1)$$

$$C(5,3) \xrightarrow{\text{sb Y}} C'(-5,3) \xrightarrow{O, \pi} C''(5,-3)$$

B. Penerapan Matriks dalam Transformasi Geometri

1. Matriks Transformasi Invers dan Transformasi Invers

Misalkan suatu titik A (x,y) ditransformasikan oleh matriks M menjadi $A'(x',y')$. Titik $A'(x',y')$ hasil transformasi titik A (x,y) oleh matriks M ini dinamakan bayangan atau peta. Sedangkan Transformasi yang membawa $A'(x',y')$ kembali ke A (x,y) dinamakan

transformasi Invers . Transformasi invers matriks M mempunyai matriks transformasi M^{-1} . Matriks yang bersesuaian dengan M^{-1} dinamakan *matriks transformasi Invers* . Misalkan titik A(x,y) ditransformasi oleh matriks $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka matriks transformasi inversnya adalah

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Misalkan suatu titik A (x,y) ditransformasi oleh Matriks $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan A'(x',y') . Hubungan antara A(x,y) dan A'(x',y') dapat dituliskan dalam bentuk

$$\text{kesamaan } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh :

Tentukan bayangan titik A(2,-1) jika ditransformasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Jawab :

Misalkan bayangan titik A(2,-1) adalah A'(x',y') maka :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Maka bayangan titik A(2,-1) adalah A'(4,-3)

2. Perubahan Luas Bangun Karena Transformasi.

Jika luas bangun semula = L, kemudian bangun itu ditransformasikan dengan matriks

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ maka luas bangun bayangannya } = L' = |ad - bc| \cdot L .$$

Secara umum dapat dikatakan bahwa jika bangun A ditransformasi oleh matriks M menghasilkan bayangan A' maka :

$$L_{A'} = |\det M| \cdot L_A$$

Kegiatan 5.

Kerjakan soal-soal berikut supaya anda lebih memahami uraian materi kegiatan belajar 5. Jangan membaca/melihat petunjuk mengerjakan latihan (kunci jawaban) sebelum anda coba mengerjakannya. Petunjuk untuk mengerjakan latihan hanya sebagai panduan bila anda mengalami kesulitan menjawab soal berikut ini.

1. Tentukan Luas bayangan persegi panjang PQRS dengan $P(-1,2)$, $Q(3,2)$, $R(3,-1)$, $S(-1,-1)$ karena dilatasi $[O,3]$ dilanjutkan rotasi pusat O bersudut $\frac{1}{2}\pi$ adalah...
2. T1 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matrik $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ dan T2 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matrik $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Bayangan titik $A(m,n)$ oleh transformasi T1 dilanjutkan T2 adalah $A'(-9,7)$.
Tentukan nilai $m - 2n$
3. Segi empat KLMN ditransformasikan oleh matriks $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan $K'L'M'N'$. Jika koordinat titik K $(-2,-2)$, L $(3,-2)$, M $(5,4)$, dan N $(-4,4)$
 - a. Tentukan koordinat titik K' , L' , M' dan N' .
 - b. Berbentuk apakah $K'L'M'N'$?
 - c. Hitunhlah luas $K'L'M'N'$.

Jika anda sudah menyelesaikan kegiatan 5 cocokkan jawaban anda pada kunci jawaban yang berada dibelakang modul ini. Setelah anda cocokkan berilah nilai kegiatan anda didalam mengerjakan kegiatan 5

- Jika nilai perolehan < 75 , artinya anda belum paham tentang Penerapan Transformasi Geometri maka anda harus mengulang kembali membaca dan memahami konsep Transformasi Geometri.
- Jika nilai perolehan ≥ 75 maka anda boleh meneruskan pada kegiatan modul berikut ini berupa Evaluasi Diri.

BAB III. EVALUASI

1. Tentukan bayangan garis $3x + 2y - 3 = 0$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. Tentukan bayangan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ ditranslasikan oleh $T_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
dilanjutkan oleh $T_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
3. Diketahui titik A(1,2), B(3,4), dan C(5,6). Tentukan bayangan segitiga ABC jika dicerminkan terhadap sumbu y
4. Tentukan bayangan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ jika dicerminkan terhadap garis $y = x$
5. Tentukan bayangan titik P(3, -4) dirotasi 90^0 berlawanan dengan arah jarum jam dengan pusat putar O(0,0)
6. Tentukan bayangan garis $x - y + 3 = 0$ jika dirotasi $+60^0$ dengan pusat putar O(0,0)
7. Tentukan bayangan titik R(-2,4) didilatasikan oleh $[O, \frac{1}{4}]$
8. Tentukan bayangan garis $3x - 5y + 15 = 0$ yang didilatasikan oleh $[O, 5]$.
9. Tentukan persamaan bayangan dari garis $3x - y + 2 = 0$ oleh refleksi terhadap garis $y=x$ dilanjutkan dengan rotasi 90^0 terhadap pusat putar O.
10. Titik P(x,y) direfleksikan terhadap $y = x$ menghasilkan bayangan titik Q. Kemudian diputar 90^0 dengan titik pusat O, sehingga bayangan akhirnya adalah R(1,-2).
Tentukan koordinat titik P dan Q.

BAB IV. PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, anda berhak untuk mengikuti tes untuk menguji kompetensi yang telah anda pelajari. Apabila anda dinyatakan memenuhi syarat ketuntasan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka anda berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

DAFTAR PUSTAKA

MGMP Matematika Kota Semarang, 2006. **Matematika SMA/MA Kelas XII Program Ilmu Pengetahuan Alam**, Semarang : PT Mascom Graphy, Semarang.

Sartono Wirodikromo, 1994. **Matematika Untuk SMU Kelas 3, Program IPA, Catur Wulan 2**, Penerbit Erlangga.

Tosari, Nur Aksin, Miyanto, Muklis, 2015. **Matematika Untuk Siswa Kelas 12, Peminatan MIPA**, Intan Pariwara